Rozklad mnohočlenů

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

nebo **Binomická věta:**

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0 \cdot b^3$$

Kvadratická rovnice

$D = b^2 - 4ac$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Viéttovy vzorce

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \qquad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

p q

$$-p = x_1 + x_2$$
$$q = x_1 \cdot x_2$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Věty v trojúhelníku

Pythagorova věta

$$c^2 = a^2 + b^2$$

kde c - přepona
a, b - odvěsny

Věta o výšce

$$v^2 = c_1 \cdot c_2$$

Věta o odvěsně

$$a^2 = c_1 \cdot c$$

Věta sinova

usu
ssu

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Proti větší straně větší úhel!

Věta kosinova

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

Logaritmy

$y = \log_a x \qquad a^y = x$

Logaritmus je číslo (y), na které musíme umocnit základ (a), abychom dostali číslo logaritmované (x).

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Goniometrie

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

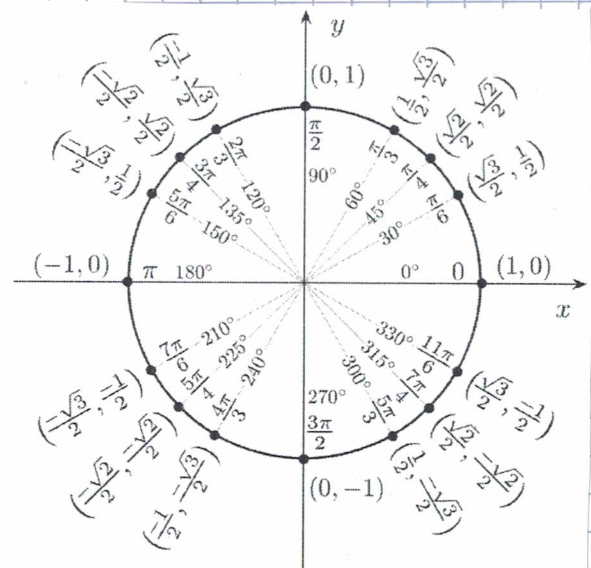
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$
$cotg\, x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$tg\, x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$cotg\, x$	$+$	$-$	$+$	$-$

2. kvadrant $\rightarrow \pi - x$
3. kvadrant $\rightarrow \pi + x$
4. kvadrant $\rightarrow 2\pi - x$

$$x_0 = x - k \cdot 2\pi$$



(cos, sin)

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$
$\mathrm{cotg}\, x$		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$

	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$
$\sin x$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$
$\cos x$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$
$\mathrm{cotg}\, x$		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\mathrm{cotg}\, 2x = \frac{\mathrm{cotg}^2 x - 1}{2\,\mathrm{cotg}\, x}$$

$$\left|\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\left|\mathrm{cotg}\, \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Komplexní čísla

$$i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{a_2}{a_1} \qquad |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$a = |a|(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

$$z = a + j \cdot b \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_1 \cdot z_2} \quad ; \quad \overline{z_2} \ldots \text{komplex sdružené číslo}$$

komplexně sdružené číslo:

$$-3 - 2i \rightarrow -3 + 2i$$

→ opačné znaménko u imaginární složky

Moivreova věta

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n \cdot \alpha + j \cdot \sin n \cdot \alpha)$$

n-tá odmocnina z komplexního čísla má n hodnot:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + j \cdot \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Analytická geometrie

Vzdálenost dvou bodů:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Souřadnice středu úsečky

$$S = \left[\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} ; \frac{z_1 + z_2}{2}\right]$$

Velikost vektoru

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Odchylka dvou vektorů

$$\cos\varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$$
$$B = \vec{u} + A$$

Vzdálenost bodu od přímky

$$v = \frac{|a \cdot \overset{m}{x_0} + b \cdot \overset{n}{y_0} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Tvary rovnic přímky

1) Obecný tvar

- musíme znát bod ležící na této přímce $A[x_0; y_0]$
- musíme znát vektor kolmý na tuto přímku (normálový) $\vec{n}(a; b)$

$$ax + by + c = 0$$

- abychom vypočítali c z rovnice, dosadíme do obecné rovnice bod a normálový vektor
- výsledná rovnice má pak tvar takový, že je dosazen normálový vektor a x a y zůstává, c je dosazeno

2) Parametrický tvar

- musíme znát bod ležící na přímce $A[x_0; y_0]$
- musíme znát vektor rovnoběžný s přímkou (směrový vektor)

$\vec{s}(s_1; s_2)$

$$x = x_0 + s_1 \cdot t \qquad t \text{ - parametr}$$
$$y = y_0 + s_2 \cdot t$$

- pomocí těchto dvou rovnic určíme souřadnice všech bodů dané přímky

3) směrnicový tvar

$$y = k \cdot x + q$$

k ... směrnice - tangens úhlu, který svírá přímka s kladnou částí osy x

q ... úsek, který vytíná přímka na ose y

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

kružnice

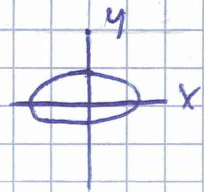
$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

Rovnice tečny v bodě dotyku

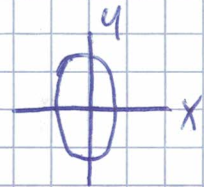
$$(x_0-m)(x-m) + (y_0-n)(y-n) = r^2$$

Elipsa

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$

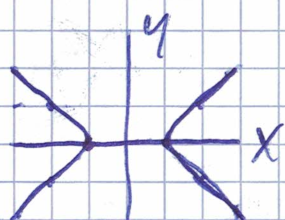


Rovnice tečny k elipse v bodě $T[x_0; y_0]$

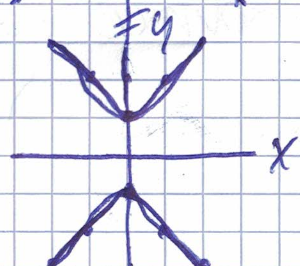
$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}=1$$

Hyperbola

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$



$$-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$



Rovnice tečny k hyperbole v bodě $T[x_0; y_0]$

$$\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}-\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}=1$$

Parabola

$$(y-n)^2=2p(x-m)$$

$$(y-n)^2=-2p(x-m)$$

$$(x-m)^2=2p(y-n)$$

$$(x-m)^2=-2p(y-n)$$

$|FD|=p \quad |XF|=|Xd|$

Rovnice tečny paraboly v bodě $T[x_0; y_0]$

$$(x_0-m)(x-m)=\pm p(y_0-n+y-n)$$

Obvody a obsahy obrazců

Čtverec

- obvod: $o = 4 \cdot a$
- obsah: $S = a^2$ $S = \frac{1}{2} u^2$
- délka úhlopříčky: $u = a \cdot \sqrt{2}$
- poloměr kružnice opsané:

  $r = \frac{u}{2}$
- poloměr kružnice vepsané:

  $r = \frac{a}{2}$

Obdélník

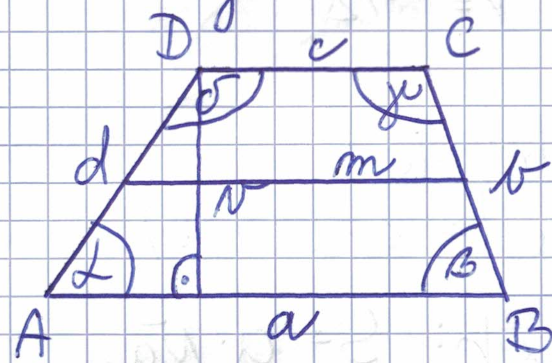
- obvod: $o = 2(a+b)$
- obsah: $S = a \cdot b$
- délka úhlopříčky: $u = \sqrt{a^2+b^2}$
- poloměr kružnice opsané:

  $r = \frac{u}{2}$

Lichoběžník

- obvod: $o = a+b+c+d$
- obsah: $S = \frac{(a+c)}{2} \cdot v$
- střední příčka: $m = \frac{a+c}{2}$
- úhly: $\alpha + \delta = 180°$

  $\beta + \gamma = 180°$



Kružnice, kruh

- obvod: $o = 2\pi r$ $o = \pi \cdot d$
- obsah: $S = \pi r^2$ $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$
- poloměr: $r = \frac{d}{2}$
- průměr: $d = 2r$

Kosočtverec

- obvod: $o = 4 \cdot a$
- obsah: $S = \frac{1}{2} u_1 \cdot u_2$

  $S = a \cdot v$ $\quad S = a^2 \cdot \sin \alpha$
- poloměr kružnice vepsané:

  $r = v/2$

Kosodélník

- obvod: $o = 2(a+b)$
- obsah: $S = a \cdot v_a$

  $S = b \cdot v_b$

  $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

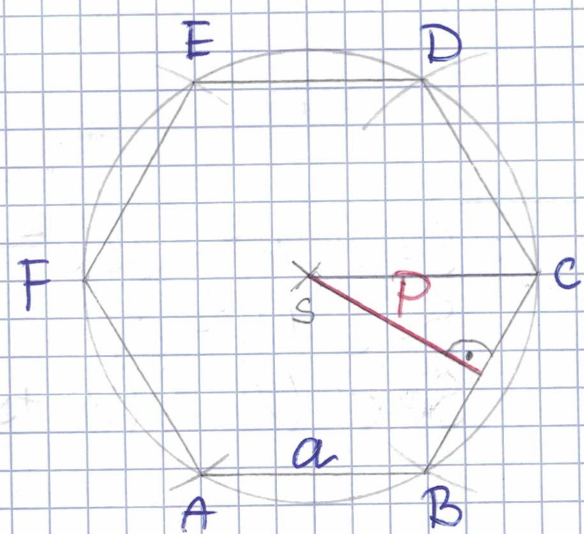
Kruhová výseč, kruhový oblouk

- délka kruh. oblouku: $a = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360°}$
- obsah: $S = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°} = \frac{r \cdot a}{2}$

Pravidelný n-úhelník

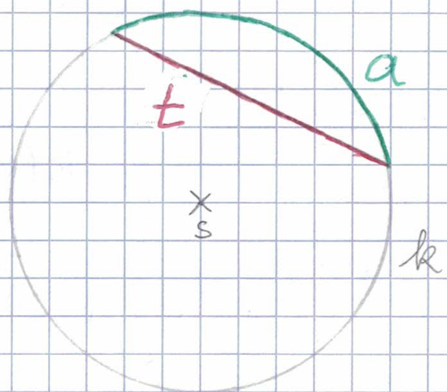
- obvod: $o = n \cdot a$
- obsah: $S = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot p$
- n - počet stran, vrcholů, úhlů
- součet vnitřních úhlů:

  $(n-2) \cdot 180°$
- počet úhlopříček: $\frac{n(n-3)}{2}$



Kruhová úseč

- délka kruh. oblouku: $a = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360°}$
- obsah: $S = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2}$
- délka tětivy: $t = 2\sqrt{v(2r-v)}$



Mezikruží

- obsah: $S = \pi r^2 - \pi s^2$

$S = \pi(r^2 - s^2)$

$S = \pi(r-s)(r+s)$

- šířka mezikruží: $m = r - s$

Obecný trojúhelník

- obvod: $o = a + b + c$
- obsah: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

$s = \frac{a+b+c}{2}$ (Heronův vzorec)

$S = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$

$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$ $\quad$ $S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta$

$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} \rho \cdot (a+b+c) = s \cdot \rho$ $\quad$ kde ρ = poloměr kruž. vepsané

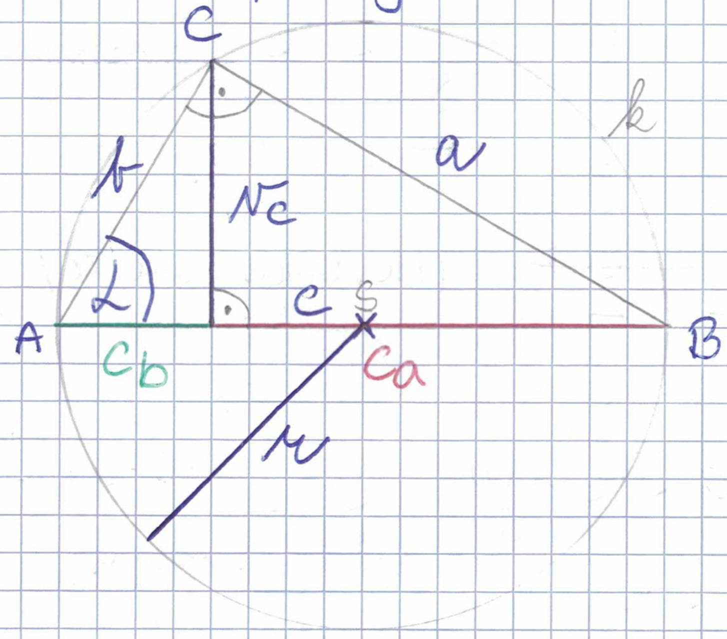
$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4p} = 2 \cdot p^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

kde p = poloměr kruž. opsané

- trojúhelníková nerovnost:

$a + c > b$ $\quad$ $a + b > c$ $\quad$ $b + c > a$

Pravoúhlý trojúhelník



- obvod: $o = a + b + c$
- obsah: $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$
- Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2$
- Euklidova věta o výšce: $v^2 = c_a \cdot c_b$
- Euklidova věta o odvěsně:

$$a^2 = c \cdot c_a \qquad b^2 = c \cdot c_b$$

- poloměr Thaletovy kružnice:

$$r = \frac{c}{2}$$

- goniometrické funkce:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}$$

Rovnostranný trojúhelník

- obvod: $o = 3 \cdot a$
- obsah: $S = \frac{a \cdot v}{2}$ $\quad S = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$$S = \frac{v^2}{3} \cdot \sqrt{3}$$

- výška: $v = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$
- kružnice opsaná: $r = \frac{2}{3} \cdot v = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3}$
- kružnice vepsaná: $\rho = \frac{1}{3} \cdot v = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{3}$

Povrchy a objemy těles

kychle

- povrch: $S = 6 \cdot a^2$
- objem: $V = a^3$
- délka stěn. úhlopříčky: $u_s = a \cdot \sqrt{2}$
- délka těles. úhlopříčky: $u_t = a \cdot \sqrt{3}$

kvádr

- povrch: $S = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$
- objem: $V = a \cdot b \cdot c$
- stěnová úhlopříčka: $u_s = \sqrt{a^2 + b^2}$
- těles. úhlopříčka: $u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Kolmý hranol

- povrch: $S = 2S_p + S_{pl}$
- obsah pláště: $S_{pl} = o \cdot v$
- objem: $V = S_p \cdot v$

o - obvod podstavy

Rotační válec

- povrch: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$

$S = 2\pi r(r + v)$

- obsah pláště: $S_{pl} = 2\pi r v$
- objem: $V = \pi r^2 \cdot v$

Rotační kužel

- povrch: $S = S_p + S_{pl}$

$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$

- obsah pláště: $S_{pl} = \pi r s$
- délka strany pláště: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
- objem: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot v$

komolý rotační kužel

- povrch: $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + r_2) \cdot s$

- obsah pláště: $S_{pl} = \pi (r_1 + r_2) \cdot s$
- délka strany pláště: $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2}$
- objem: $V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

kolmý jehlan

- povrch: $S = S_p + S_{pl}$
- obsah pláště: $S_{pl} = \frac{1}{2} \cdot o \cdot h$
- objem: $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$

komolý jehlan

- povrch: $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$
- obsah pláště: $S_{pl} = \frac{1}{2} (o_1 + o_2) \cdot h$
- objem: $V = \frac{1}{3} \cdot v \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$

koule

- povrch: $S = 4 \pi r^2$

$S = \pi \cdot d^2$

- objem: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$V = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$

kulová výseč

- povrch: $S = 2 \pi r v + \pi r \varrho$
- objem: $V = \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot v$
- poloměr příslušné kulové úseče: $\varrho = \sqrt{v \cdot (2r - v)}$

kulový vrchlík

- povrch vrchlíku: $S_v = 2 \pi r \cdot v$

kulová úseč

- povrch: $S = \pi \cdot \varrho^2 + 2\pi r \cdot v$
- objem: $V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot v (3\varrho^2 + v^2)$

- poloměr podstavy:
  $\varrho = \sqrt{v(2r - v)}$

Rovnoběžníky

Čtverec

a) všechny strany shodné
b) všechny úhly pravé
c) úhlopříčky shodné
d) úhlopříčky se půlí
e) úhlopříčky jsou na sebe kolmé
f) lze opsat i vepsat kružnici
g) 4 osy souměrnosti

Obdélník

a) dvě a dvě protější strany shodné a rovnoběžné
b) všechny úhly pravé
c) úhlopříčky shodné
d) úhlopříčky se půlí
e) úhlopříčky nejsou na sebe kolmé
f) lze opsat, nelze vepsat kružnici
g) 2 osy souměrnosti

kosočtverec

a) všechny strany shodné
b) protější úhly shodné
c) úhlopříčky nejsou shodné
d) úhlopříčky se půlí
e) úhlopříčky jsou na sebe kolmé

f) nelze opsat, lze vepsat kružnici
g) 2 osy souměrnosti

kosodélník

a) dvě a dvě protější strany shodné a rovnoběžné
b) protější úhly shodné
c) úhlopříčky nejsou shodné
d) úhlopříčky se půlí
e) úhlopříčky nejsou na sebe kolmé
f) nelze opsat, lze vepsat kružnici
g) nemá osu souměrnosti

Derivace

- derivace konstanty rovná se 0

$(c)' = 0$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$(e^x)' = e^x$ $\quad (a^x) = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(cotg\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(x^2)' = 2x$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \quad (c \text{ konstanta})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c} \quad (c \text{ konstanta})$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right)' =$$

$$f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right)$$

$f'(x) = k_T = \mathrm{tg}\,\alpha$ (směrnice tečny v bodě x_0)

Rovnice tečny:

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$$

$$v = s' \quad a = v' \quad a = s''$$

Integrace

$$\int dx = x \quad \left(\int 0\, dx = C\right)$$

$$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int 2\, dx = 2x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

součet

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

rozdíl

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot \int f(x)\,dx$$

integrace konst + f

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Metoda integrace per partes

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = u(x) & v' = v'(x) \\ u' = u'(x) & v = v(x) \end{array} \right| =$$

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Substituční metoda integrace

$$\left[f(g(x)) \right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\, dx \\ dx = \dfrac{dt}{g'(x)} \end{array} \right] =$$

$$\int f'(t) \cdot g(x)' \cdot \frac{dt}{g'(x)} =$$

$$\int f'(t)\, dt = f(t) + c =$$
$$f(g(x)) + c$$

$$\int \ln x\, dx = x \cdot (\ln x - 1) + c$$

$$\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int cotg\, x\, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$$

Určitý integrál

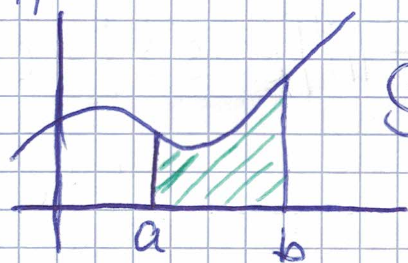
$$\int_a^b f(x) = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

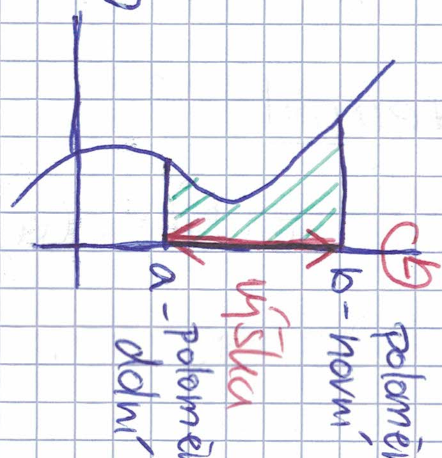
$$a < c < b$$

Výpočet obsahu rovinného obrazce



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Objem rotačního tělesa



$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx$$

$|ab|$ - výška tělesa

Geometrický význam 1. derivace v bodě x_0

Rovnice tečny: $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$

1. Do originálního předpisu dosaď x_0
2. Zderivuj originální předpis
3. Dosaď do zderivované fce $x_0 \rightarrow y_0$
4. Vypočítej rovnici tečny

$f'(x_0)$ - dosazuješ x_0 do zderivované $y_0 \rightarrow$ dosazuješ x_0 do original

Aritmetická posloupnost

- Rekurentní: $a_{n+1} = a_n + d$
- n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$
- součet prvních n-členů:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_r = a_s + (r-s)\,d$$

Geometrická posloupnost

- rekurentní: $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- n-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- součet prvních n-členů:

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1 \qquad S_n = n \cdot a_1$$

$q \neq 1$ $\qquad \frac{a_2}{a_1} = q \qquad$ $q = 1$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

Finanční matematika

Jednoduché úročení

$$I_n = I_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100} \cdot k\right)$$

I_0 – jistina $\quad$ n – počet úrok. období

p – úroková míra v %

k … zdaňovací koeficient

$$\text{úrok} = I_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$D = \frac{s}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

D – dluh $\quad$ s – splátka

Složené úročení

$$I_n = I_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot k\right)^n$$

Střádání – spoření

$$I = I_0 \cdot r \cdot \frac{r^{n}-1}{r-1} \quad \text{(součet)}$$

$$r = \left(1 + \frac{r}{100} \cdot k\right)$$

$$I = a_0 \cdot q^n$$

$$I = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Amortizace: $r = 1 - \frac{r}{100}$

Nekonečná geometrická řada

$$s = a_1/(1-q)$$

Kombinatorika

Variace bez opakování

- záleží na pořadí

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutace bez opakování

- záleží na pořadí
- vybírám všechny prvky

$$P(n) = n!$$

Kombinace bez opakování

- nezáleží na pořadí

$$C_k(n) = \binom{n}{k}$$

Variace s opakováním

$$V'_k(n) = n^k$$

Permutace s opakováním

$$P'(k_1, k_2, \dots k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

Kombinace s opakováním

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Binomická věta

$$A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} \cdot b^{(k-1)}$$

Společný dělitel

- Největší společný dělitel: to, co je společné

Společný násobek

- největší společný násobek: to, čeho je více

Statistika

Modus - hodnota s největší četností

Medián - prostřední člen mezi hodnotami, jsou-li uspořádány podle velikosti

x_i - hodnota znaku
n_i - četnost znaku

Aritmetický průměr prostý:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Aritmetický průměr vážený:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \cdot n_i$$

Směrodatná odchylka hodnot

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Rozptyl hodnot

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Pravděpodobnost

Bernoulliho schéma:

$$P = \binom{n}{k} \cdot (\text{úspěch})^{k} \cdot (\text{neúspěch})^{n-k}$$

Mocniny 2 (IP adresace)

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

32768	16384	8192	4096	2048	1024	512	256
2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8

Funkce

- je předpis, podle kterého každé hodnotě nezávislé proměnné x přiřazujeme právě jednu hodnotu závislé proměnné y

Definiční obor funkce Df

- množina takových reálných čísel, která lze dosadit za x do daného předpisu tak, aby předpis měl smysl

Obor hodnot funkce Hf

- množina všech reálných čísel takových, která získáme po dosazení každé hodnoty z Df

Graf funkce

- množina bodů o souřadnicích $X[x;y]$; $X[x;f(x)]$

$x \in D_f$ $\quad$ $y \in H_f$

Vlastnosti funkcí

Monotónnost

Rostoucí funkce

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Klesající funkce

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Prostá funkce

- je taková funkce, která je na celém svém definičním oboru Df rostoucí (klesající)

Sudá funkce

- funkce je sudá, jestliže
  a) $x \in D_f \wedge (-x) \in D_f$
  b) $f(-x) = f(x)$ pro $\forall x \in D_f$
- graf této funkce je souměrný podle osy y

Lichá funkce

- funkce je lichá, jestliže
  a) $x \in D_f \wedge (-x) \in D_f$
  b) $f(-x) = -f(x)$ pro $\forall x \in D_f$
- graf této funkce je souměrný podle počátku

Omezená funkce

- funkce f se nazývá zdola omezená právě tehdy, když existuje takové číslo d, že pro všechna x z Df platí, že d je menší nebo rovno f(x)
- shora omezená:
  $f(x) \leq d$
- fce sin x a cos x jsou omezené

Minimum a maximum

- funkce f má v bodě M definičního oboru maximum, pokud je v tomto bodě M nejvyšší funkční hodnota ze všech funkčních hodnot, které funkce má
- Obdobně pro minimum.

konkávnost, konvexnost

- konkávní – ∩
- konvexnost – ∪

Vyšetření průběhu funkce

1. Určení definičního oboru D_f, průsečíků s osami a spojitosti funkce
2. Určení sudosti, lichosti
3. Intervaly monotónnosti, stacionární body
   - $y' = 0$ stacionární body
   - $y' > 0$ rostoucí funkce
   - $y' < 0$ klesající funkce
4. Lokální extrémy
   - podle velikosti y'' ve stacionárních bodech
   - $y'' > 0$ ve stacionárním bodě je lokální minimum
   - $y'' < 0$ ve stacionárním bodě je lokální maximum
5. Inflexní body, konkávnost, konvexno
   - $y'' = 0$ inflexní bod
   - $y'' > 0$ konvexní funkce
   - $y'' < 0$ konkávní funkce

⑥ Asymptoty

a) rovnoběžné s osou y

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, pak přímka $x \to x_0$ je asymptota

b) rovnoběžné s osou x

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, pak přímka $y = a$ je asymptota

c) asymptoty směrnicového typu $y = k \cdot x + q$

- za podmínky, že $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

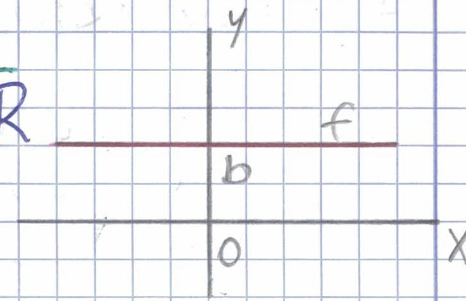
platí $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ a

$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - k \cdot x]$

⑦ Načrtnutí grafu

Přehled funkcí

Konstantní fce

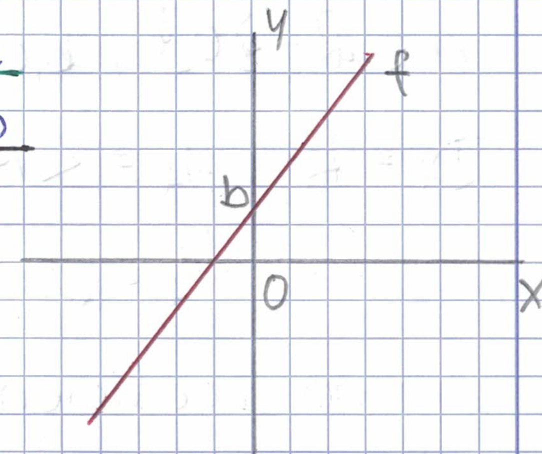


$f: y = b$, $b \in R$

$D_f = R$

$H_f = \{b\}$

Lineární fce



$f: y = ax + b$

$a \in R - \{0\}$

$b \in R$

$D_f = R$

$H_f = R$

Změna koeficientu a se projeví jiným sklonem přímky - s rostoucí $|a|$ se přímka více „přimyká" k ose y.

Kvadratická fce

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

$$f: y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

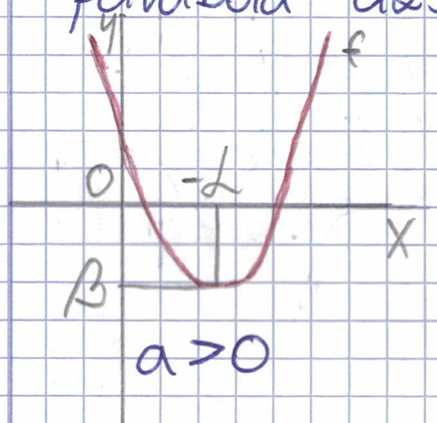
$$f: y = a(x + \alpha)^2 + \beta$$

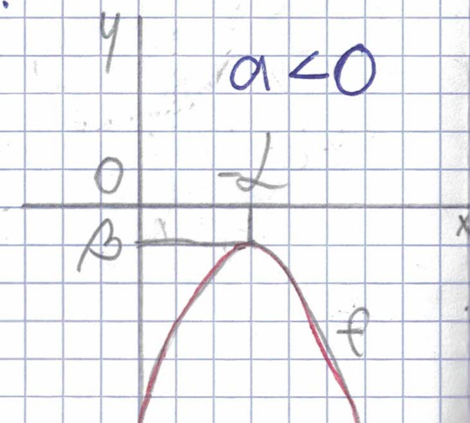
$a \in R - \{0\}$, $b, c \in R$

$D_f = R$, $H_f = \langle \beta; \infty) \rightarrow a > 0$

$H_f = (-\infty; \beta\rangle \rightarrow a < 0$

Změna koeficientu a se projevuje jinou šířkou paraboly – s rostoucí |a| je parabola užší.





Lineární lomenná fce

$$f: y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad f: y = \alpha + \frac{\gamma}{x + \beta}$$

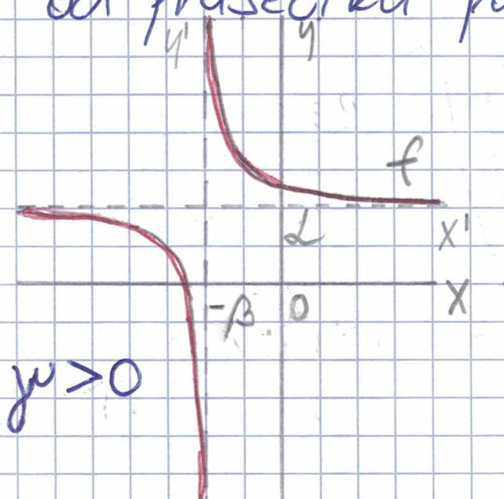
$$f: y = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

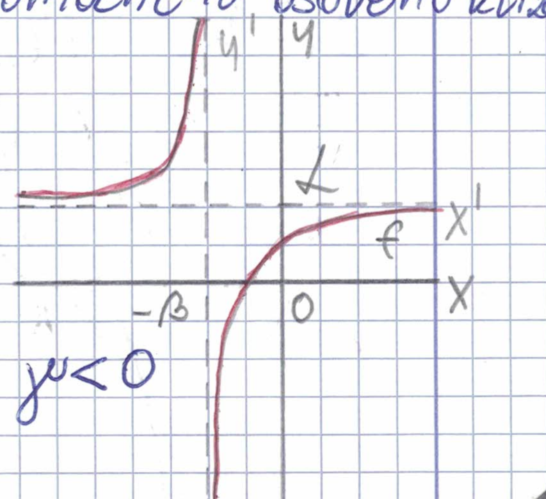
$a, b, c, d \in R$ $\quad c \neq 0$

$ad - bc \neq 0$

$D_f = R - \{-\beta\}$ $\quad H_f = R - \{-\alpha\}$

Změna koeficientu γ se projevuje jiným „prohnutím" hyperboly – s rostoucí $|\gamma|$ se hyperbola více „narovnává" a „průhyb se vzdaluje" od průsečíku pomocného osového kříže





Mocninné fce

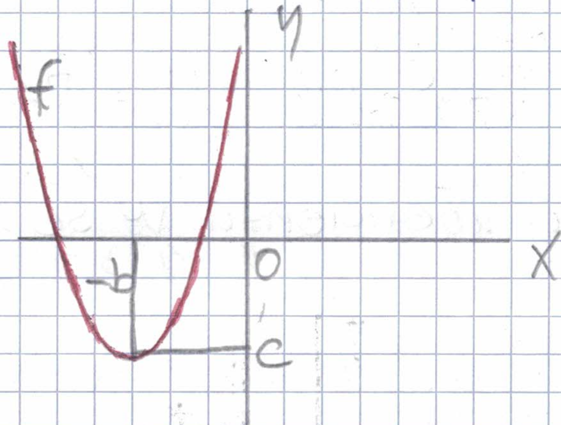
$f: y = a(x+b)^n + c$

$a \in R - \{0\}, \quad b, c \in R$

a) n je celé kladné sudé

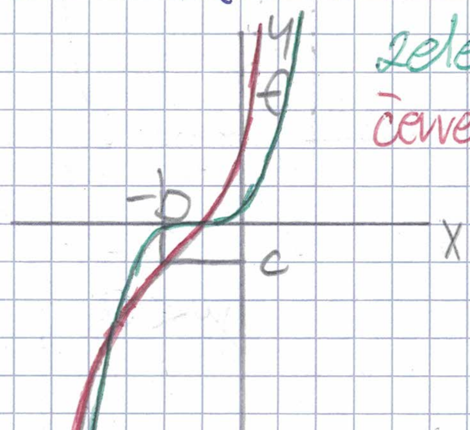
$D_f = R \qquad H_f = \langle c; \infty)$ pro $a > 0$

$H_f = (-\infty; c\rangle$ pro $a < 0$



b) n je celé kladné liché

$D_f = R \qquad H_f = R$



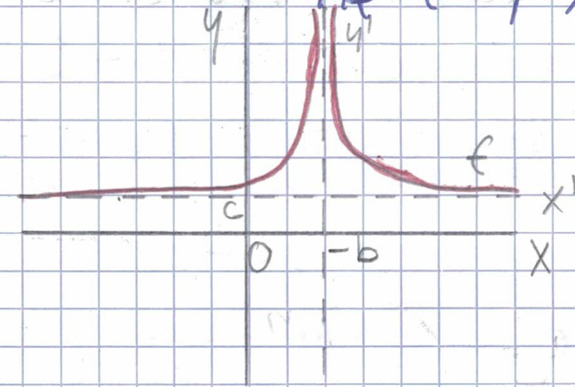
zelená správně

červená tg x

c) n je celé záporné sudé

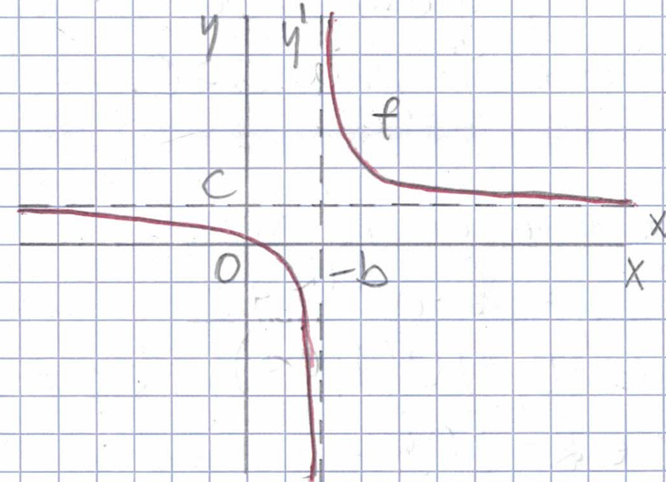
$D_f = R - \{-b\} \qquad H_f = (c; \infty)$ pro $a > 0$

$H_f = (-\infty; c)$ pro $a < 0$



d) n je celé záporné liché

$D_f = R - \{-b\}, \quad H_f = R - \{c\}$

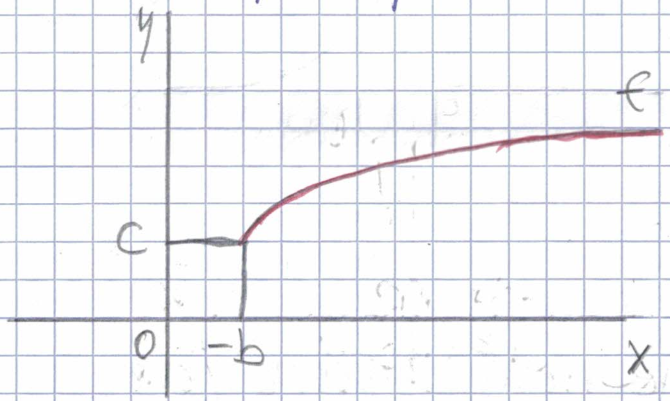


e) n je reálné z intervalu $(0;1)$

$D_f = \langle -b; \infty)$

$H_f = \langle c; \infty)$ pro $a > 0$

$H_f = (-\infty; c\rangle$ pro $a < 0$



Všechny grafy mocninných fcí kresleny pro $a > 0$.

Exponenciální fce

$f: y = k \cdot a^{x+b} + c$

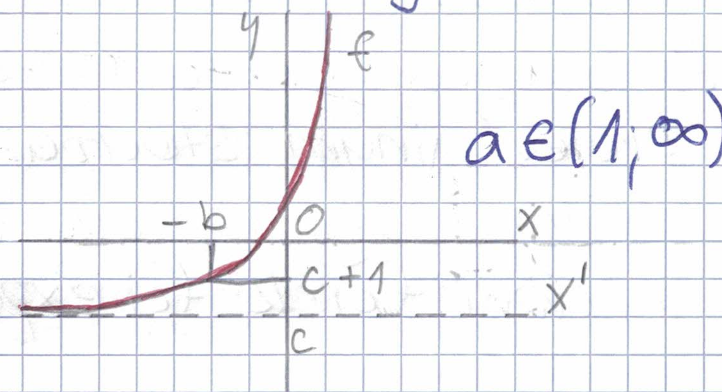
$a \in (0;1) \cup (1;\infty)$, $b, c \in R$

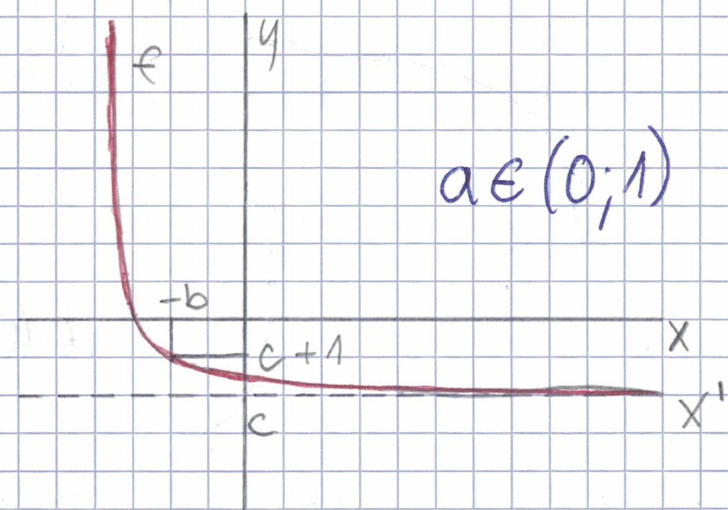
$k \in R - \{0\}$

$D_f = R$ $\quad H_f = (c;\infty)$ pro $k > 0$

$H_f = (-\infty; c)$ pro $k < 0$

Změna koeficientu a se projeví jiným stoupáním křivky – s rostoucím a pro $a \in (1;\infty)$ a s klesajícím a pro $a \in (0;1)$ je křivka strmější.





Oba grafy nakresleny pro $k > 0$.

Logaritmická fce

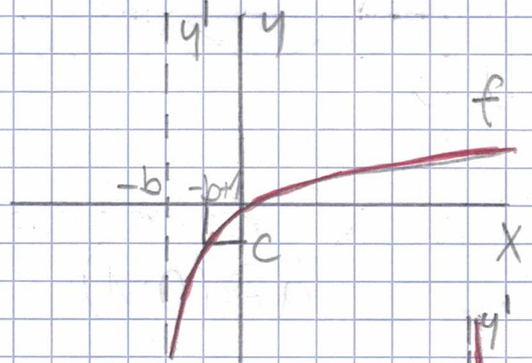
$f: y = \log_a(x+b)+c$

$a \in (0;1) \cup (1;\infty), \quad b, c \in R$

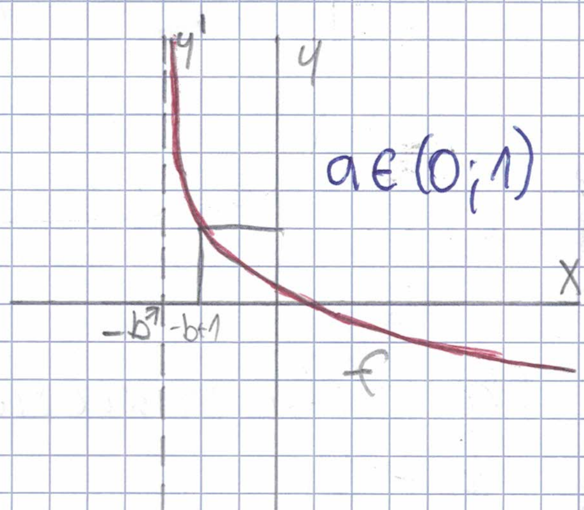
$D_f = (-b;\infty) \qquad H_f = R$

Změna koeficientu a se projeví jiným stoupáním křivky. Logaritmická fce je inverzní fcí k fci exponenciální.

$a \in (1;\infty)$



$a \in (0;1)$



Goniometrické fce

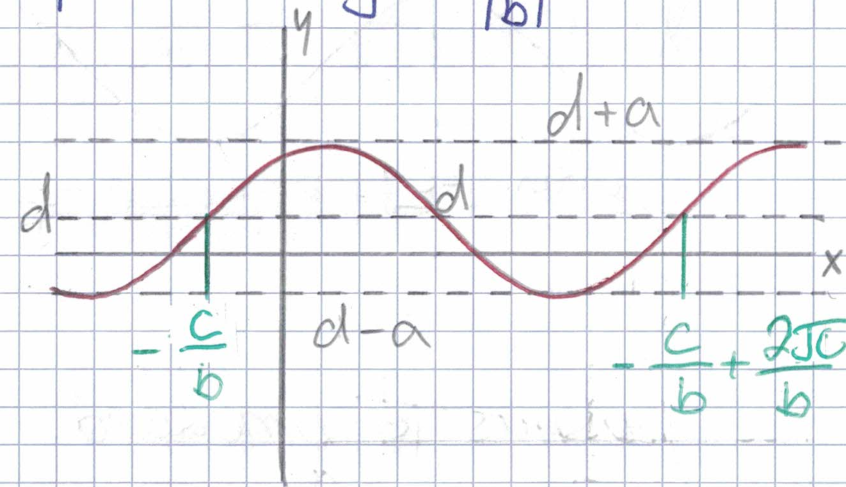
$a, b \in R - \{0\}, \quad c, d \in R$

a) fce sinus

$f: y = a \cdot \sin(bx+c)+d$

$D_f = R \qquad H_f = \langle d-a; d+a \rangle$

perioda je $\frac{2\pi}{|b|}$



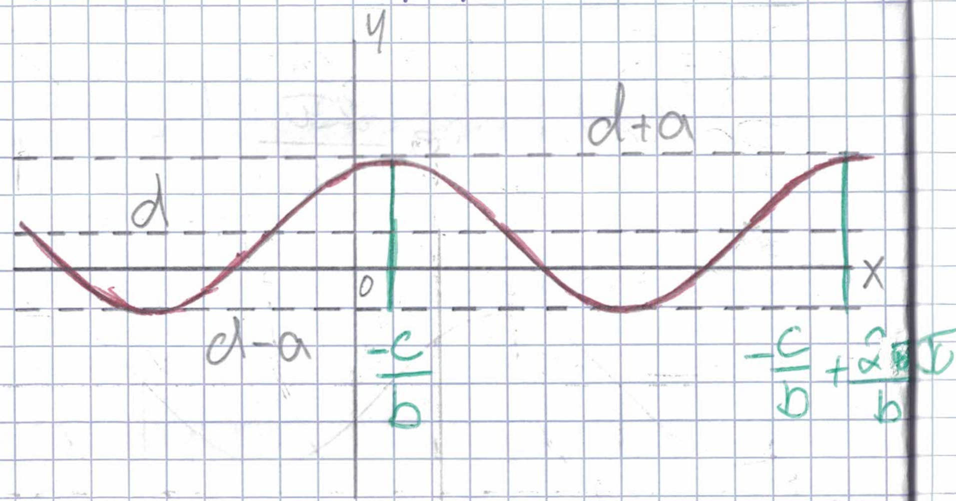
Fce sinus je omezená.
Graf pro $b>0$.

b) fce kosinus

$f: y = a \cdot \cos(bx + c) + d$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad H_f = \langle d-a; d+a \rangle$

perioda je $\dfrac{2\pi}{|b|}$



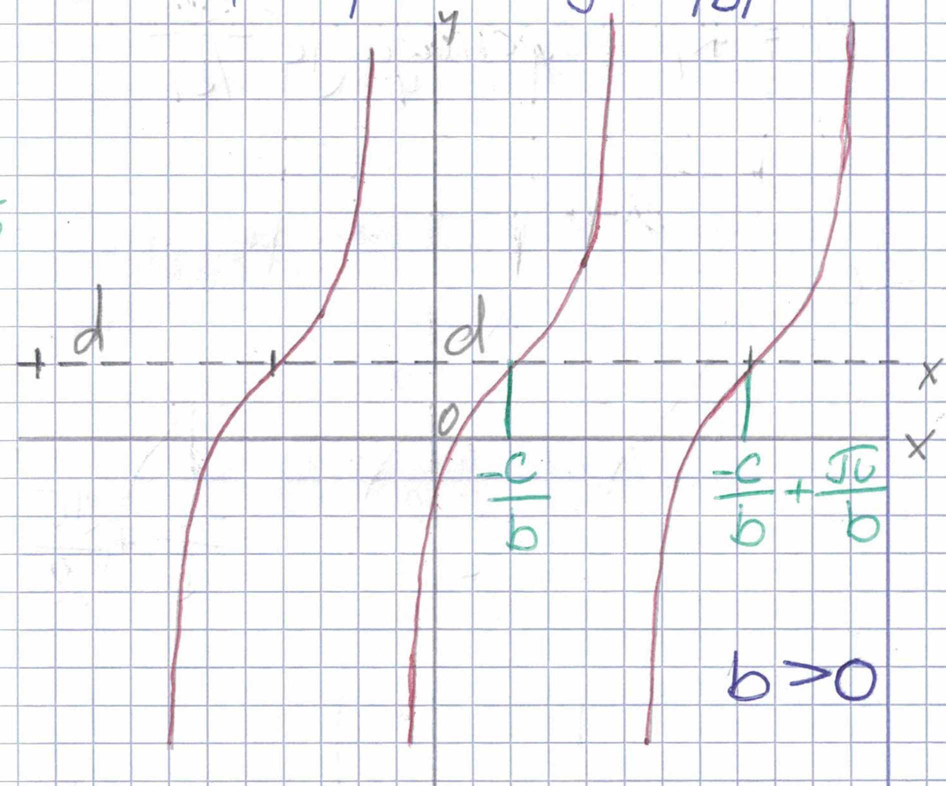
Fce kosinus je omezená.
Graf pro $b > 0$.

c) fce tangens

$f: y = a \cdot tg(bx + c) + d$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi - 2c}{2b}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$H_f = \mathbb{R}$, perioda je $\dfrac{\pi}{|b|}$



Změna koeficientu a v grafu se projeví jiným stoupáním křivky – s rostoucím a bude křivka strmější.

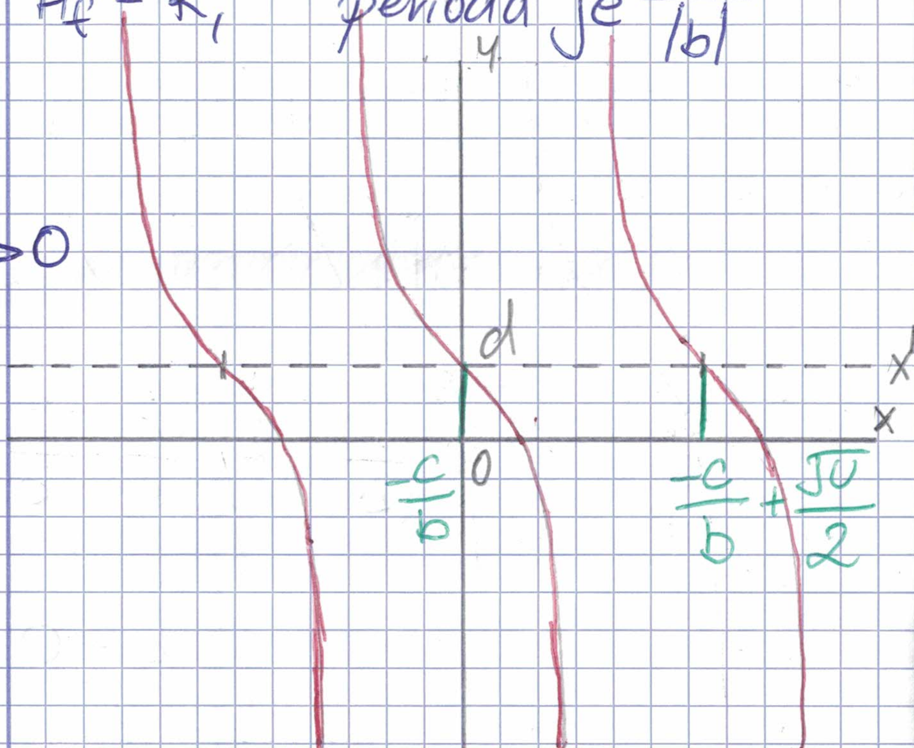
d) fce kotangens

$f: y = a \cdot \cot g(bx+c) + d$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\cdot\pi - c}{b} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$H_f = \mathbb{R}$, perioda je $\frac{\pi}{|b|}$

$b > 0$



Změna koeficientu a v grafu se projeví jiným stoupáním křivky. S rostoucím a bude křivka strmější

Logické operace

Negace ¬ ' A'

- Výrok s opačnou pravdivostní hodnotou.

Konjunkce ∧ a

- Konjunkcí dvou výroků A, B rozumíme takový výrok, který je pravdivý pouze v tom případě, jsou-li pravdivé oba výroky (A, B).

Disjunkce ∨ nebo

- Disjunkcí dvou výroků A, B rozumíme takový výrok, který je pravdivý právě tehdy, když alespoň jeden z výroků A, B je pravdivý.

Ostrá disjunkce $\veebar$ nebo

- Ostrou disjunkcí dvou výroků A, B rozumíme takový výrok, který je pravdivý právě tehdy, když je jeden z výroků A, B pravdivý a druhý nepravdivý.

Implikace $\Rightarrow$ jestliže..., potom...

- Implikací dvou výroků A, B je výrok, který je nepravdivý pouze tehdy, když je výrok A pravdivý a výrok B nepravdivý. Ve zbývajících případech je implikace pravdivá.

Ekvivalence $\Leftrightarrow$ právě tehdy, když

- Ekvivalencí dvou výroků A, B rozumíme takový výrok, který je pravdivý pouze v případě, kdy oba výroky A, B mají stejnou hodnotu

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Výroky složené pomocí logických operací se nazývají výrokové formule.

Vždy pravdivá výroková formule se nazývá tautologie.

Vždy nepravdivá výroková formule se nazývá kontradiktorická (kontradikce).

Splnitelná formule je formule v některých případech pravdivá, v jiných případech nepravdivá.

De Morganovy zákony

$(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$

$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$

$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$

$(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$

kvantifikátory

1) Obecný (velký) kvantifikátor

$\forall$ ... pro každé, pro všechna

$\forall'$ ... pro žádné

2) Existenční (malý) kvantifikátor

$\exists$ ... existuje alespoň jedno ...

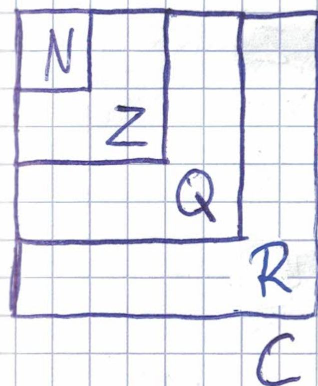
$\nexists$ ... neexistuje žádný

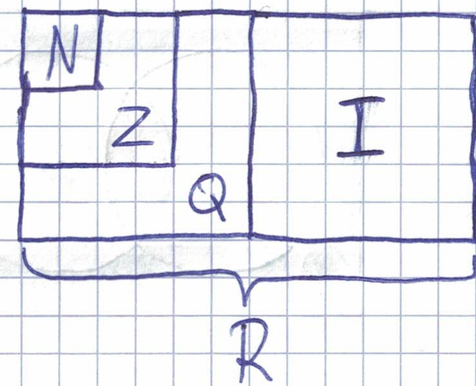
3) kvantifikátor jednoznačné existence

$\exists!$ ... existuje právě jeden, dva ...

Číselné množiny

N – přirozená čísla (natural)
Z – celá čísla
Q – racionální čísla
I – iracionální čísla
R – reálná čísla
C – komplexní čísla



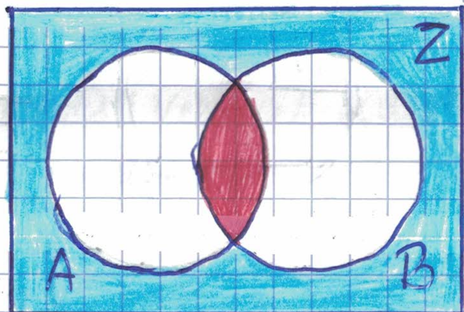


Množinové operace

Průnik množin $A \cap B$

$A \cap B = \{x \in Z : x \in A \wedge x \in B\}$

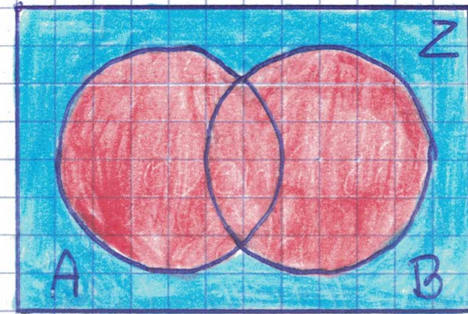
- Průnik dvou množin A, B je množina, která obsahuje právě ty prvky, které patří do každé z obou množin A, B.



Sjednocení množin $A \cup B$

$A \cup B = \{x \in Z : x \in A \vee x \in B\}$

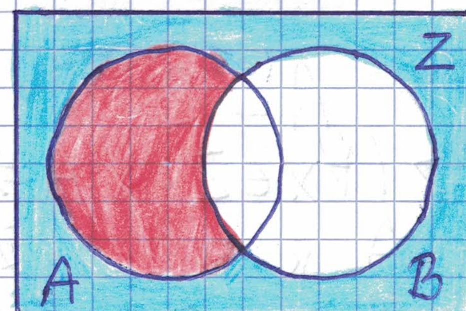
- Sjednocení dvou množin A, B je množina, která obsahuje právě ty prvky, které patří alespoň do jedné z množin A, B.



Rozdíl množin $A - B$

$A - B = \{x \in Z : x \in A \wedge x \notin B\}$

- Rozdíl dvou množin A, B je množina, která obsahuje právě ty prvky množiny A, které nepatří do množiny B.

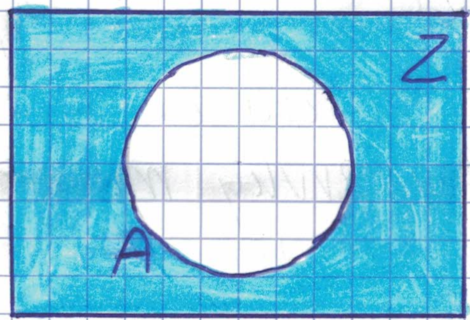


Jestliže $A \cap B = \emptyset$, nazýváme množiny A, B disjunktní.

Doplněk množiny A'

$A' = \{x \in Z : x \notin A\}$

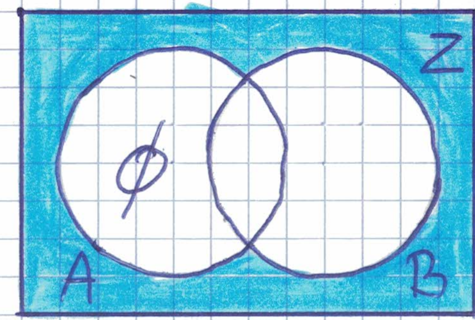
- Doplněk množiny A je množina, která obsahuje právě ty prvky ze základní množiny Z, které nepatří do množiny A.



Inkluze $A \subset B$

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in Z : x A \Rightarrow x \in B)$

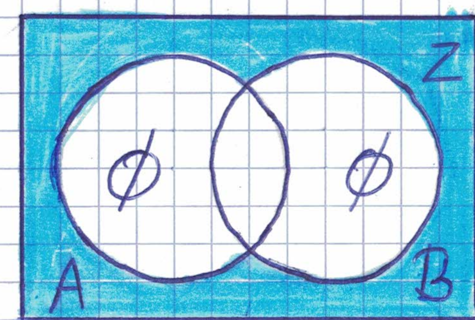
- Množina A je podmnožinou množiny B právě tehdy, když každý prvek množiny A je též prvkem množiny B.



Rovnost množin $A = B$

$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in Z : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

- Množina A se rovná množině B právě tehdy, když pro každý prvek $x \in Z$ platí $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.



Oxford

Robert Bedrunka

BED0145

robert.bedrunka.st@vsb.cz

702 493 542