DŮLEŽITÉ VZORCE ze SŠ matematiky

1. Druhé a třetí mocniny:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b)\,,\\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)\,,\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\,,\\
a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2\,,\\
a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2\,,\\
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a+b)^3\,,\\
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a-b)^3\,,\\
a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc &= (a+b+c)^2\,.
\end{aligned}$$

2. Rozklad součtu a rozdílu vyšších mocnin:

$$\begin{aligned}
a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})\,,\\
&\qquad n \in \mathbb{N} \text{ liché},\\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})\,,\\
&\qquad n \in \mathbb{N} \text{ liché},\\
a^n - b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})\,,\\
&\qquad n \in \mathbb{N} \text{ sudé}.
\end{aligned}$$

3. Exponenciální a mocninné výrazy:

$$\begin{aligned}
a^r \cdot a^s &= a^{r+s}\,, &&\\
\frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}\,, && a \neq 0\,,\\
\left(a^r\right)^s &= a^{rs}\,, &&\\
(a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r\,, &&\\
\left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r}\,, && b \neq 0\,.
\end{aligned}$$

4. Výrazy s odmocninami:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}\,, &&\\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,, && b \neq 0\,,\\
\left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \sqrt[n]{a^m}\,, &&\\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[m \cdot n]{a}\,, &&\\
\sqrt[n]{a} &= \sqrt[m \cdot n]{a^m}\,. &&
\end{aligned}$$

5. Rovnosti s absolutní hodnotou:

$$|a+b| = \begin{cases} |a| + |b| & \text{pro } \ a \cdot b > 0\,,\\ |a| - |b| & \text{pro } \ a \cdot b < 0,\ |a| > |b|\,,\\ |b| - |a| & \text{pro } \ a \cdot b < 0,\ |a| < |b|\,, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|a-b| &= |b-a|\,, & \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|}\,, \quad b \neq 0\,,\\
|a \cdot b| &= |a| \cdot |b|\,, &&\\
|-a| &= |a|\,, & \sqrt{a^2} &= |a|\,.
\end{aligned}$$

6. Nerovnosti s absolutní hodnotou:

$$|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|\,,$$

$$|x-a| \leq b \iff x \in \langle a-b, a+b \rangle\,,$$

$$|x-a| > b \iff x \in (-\infty, a-b) \cup (a+b, +\infty)\,.$$

7. Výrazy s logaritmy:

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y\,, &&\\
\log \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y\,, &&\\
\log_a x^r &= r \log_a x\,, && r \in \mathbb{R}\,,\\
x &= a^{\log_a x}\,, &&\\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}\,, && b > 0,\ b \neq 1\,,\\
\log_a b &= \frac{1}{\log_b a}\,, && b > 0,\ b \neq 1\,.
\end{aligned}$$

8. Logaritmus, exponenc. funkce a obecná mocnina:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x = y \iff x = \ln y\,, && y > 0\,,\\
&a^x = y \iff x = \log_a y\,, && a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0\,,\\
&x^y = \mathrm{e}^{\ln x^y} = \mathrm{e}^{y \ln x}\,, && x > 0,\ x \neq 1\,,\\
&x^y = 10^{\log_{10} x^y} = 10^{y \log_{10} x}\,, && x > 0,\ x \neq 1\,.
\end{aligned}$$

9. Řešení kvadratické rovnice, Vièt ovy vzorce:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \ldots \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,,$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad \ldots \quad x_1 + x_2 = -p\,,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q\,.$$

10. Převody mezi úhlovými jednotkami:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{rad}\,, \qquad 1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}\,,$$

$$x^\circ = \frac{x \cdot \pi}{180}\,\text{rad}\,, \qquad x\,\text{rad} = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}\,,$$

11. Hodnoty goniometrických funkcí ve význ. úhlech:

x°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$x\,\text{rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0	$\times$	0
$\mathrm{cotg}\, x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\times$	0	$\times$

12. Znaménka goniometrických funkcí v kvadrantech:

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
x	$(0, \pi/2)$	$(\pi/2, \pi)$	$(\pi, 3\pi/2)$	$(3\pi/2, 2\pi)$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{tg}\, x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\mathrm{cotg}\, x$	$+$	$-$	$+$	$-$

13. Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

14. Vztahy mezi gon. funkcemi s posunutým úhlem:

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

15. Součtové vzorce:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$
$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}.$$

16. Vzorce pro dvojnásobný argument:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x}.$$

17. Vzorce pro poloviční argument:

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$
$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \qquad \left|\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}.$$

18. Součet a rozdíl sinů, kosinů, tangent a kotangent:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$
$$\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}.$$

19. Definice gon. funkcí v pravoúhlém trojúhelníku:

$\triangle ABC$: odvěsny a, b, přepona c, ostrý $\angle\alpha$ (u vrch. A)

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

20. Pythagorova v., Euklidovy v. o výšce a odvěsně:

$\triangle ABC$: odvěs. a, b, přep. c s úseky c_a, c_b, výška $v \perp c$

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad v^2 = c_a \cdot c_b, \qquad a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b.$$

21. Aritmetická posloupnost:

$\{a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots, a_1+(n-1)d, \ldots\}$, diference d,
n-tý člen a_n, součet prvních n členů s_n:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_s = a_r + (s-r)d, \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

22. Geometrická posloupnost a geometrická řada:

$\{a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots, a_1q^{n-1}, \ldots\}$, kvocient q, n-tý člen a_n,
součet prvních n členů s_n, součet geometr. řady (GŘ) s:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad a_s = a_r q^{s-r}, \quad s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q};$$ pro $|q| < 1$

má GŘ $a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1} + \cdots$ součet $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

23. Kombinatorika:

faktoriál: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, $n! = n(n-1)!$, $0! = 1$,

kombinační číslo: $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$,

$$\binom{0}{0} = 1, \ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \ \binom{n}{1} = n, \ n \in \mathbb{N},$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \ n, k \in \mathbb{N}_0, \ k \le n,$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \ n, k \in \mathbb{N}_0, \ k < n,$$

permutace: $P(n) = n!$, [níže označuje k. kombinace]

permut. s op.: $P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$,

variace: $V(k, n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, var. s opak.: $V'(k, n) = n^k$,

k.: $C(k, n) = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, k. s op.: $C'(k, n) = \dbinom{n+k-1}{k}$.

24. Komplexní čísla:

aritmetický tvar: $z = a + \mathrm{j}b$, a reálná, b imag. část k.č.,
mocniny komplexní jednotky $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$:
$\mathrm{j}^2 = -1, \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}, \ \mathrm{j}^4 = 1, \mathrm{j}^5 = \mathrm{j}, \mathrm{j}^6 = -1, \mathrm{j}^7 = -\mathrm{j}, \ldots,$
$\ldots, \mathrm{j}^{4n} = 1, \mathrm{j}^{4n+1} = \mathrm{j}, \mathrm{j}^{4n+2} = -1, \mathrm{j}^{4n+3} = -\mathrm{j}, \ldots,$
$z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$,
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 + \mathrm{j}b_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1)$,
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_1 \cdot z_2}$; $\overline{z}_2 = a_2 - \mathrm{j}b_2$ je číslo komplex. sdružené k z_2,
goniometrický tvar: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$, kde
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je modul (abs.h.) a φ argument, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$,
$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$,
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$,
Moivreova v.: $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi)$,
n-tá odmocnina z komplexního čísla má n hodnot:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$